

Inhalt

1. Grundsätzliches

- 1.1 Umformungen von Gleichungen
 - 1.1.1 Äquivalente Umformungen
 - 1.1.2 nicht äquivalente Umformungen
- 1.2 Manche sehen das ;o)
- 1.3 Konstanten
- 1.4 Wurzel- und Potenzregeln
- 1.5 Logarithmen
- 1.6 Matizen
- 1.7 Quadratische Funktion (Parabel)
- 1.8 trigonometrische Funktionen
- 1.9 Umkehrfunktion
- 1.10 Einheitskreis

2. Grenzwerte

- 2.1 Allgemein
- 2.2 unbestimmte Ausdrücke
- 2.3 Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$
- 2.4 Grenzwerte für $x \rightarrow -\infty$
- 2.5 Grenzwerte für $x \rightarrow 0$
- 2.6 Grenzwerte für $x \rightarrow -0$
- 2.7 l'Hospital

3. Differenzieren

- 3.1 Was bedeutet das?
- 3.2 Spezielle Funktionen
- 3.3 Allgemeine Regeln
- 3.4 Leibnitz-Regel

4. Integrieren

- 4.1 Was bedeutet das?
- 4.2 Spezielle Integrale
- 4.3 Allgemeine Regeln
- 4.4 Bestimmtes Integral
 - 4.4.1 Was ist das?
 - 4.4.2 Formeln

5. Tylorreihen

6. Extrema

- 6.1 Extrema in \mathbb{R}
- 6.2 Extrema in \mathbb{R}^2
- 6.3 Extrema in \mathbb{R}^3

7. Optimierung unter Nebenbedingung

8. Differenzialgleichungen

- 8.1 Welche Arten gibt es?
- 8.2 lineare DGL 1. Ordnung
- 8.3 autonome DGL 1. Ordnung (mit Trennung der Variablen)

1. Grundsätzliches

1.1 Umformungen von Gleichungen

1.1.1 Äquivalente Umformungen

Die Umformungsschritte dürfen die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändern. Um zu kennzeichnen das die umgeformte Gleichung äquivalent zur vorhergehenden Gleichung ist wird er \Leftrightarrow verwendet.

1. Umformen einer Seite der Gleichung
 - **Addieren** von Ausdrücken, z.B. $5 + 7 + 2x = 0 \Leftrightarrow 12 + 2x = 0$
 - **Kommutativgesetz**, z.B. $5x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 0$
 - **Distributivgesetz**, z.B. $5 \cdot (3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 15x + 10 = 0$
 - **Potenzgesetze** anwenden, z.B. $3x^2 \cdot x^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x^5 + 5 = 0$
2. Addieren / Subtrahieren einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung
3. Addieren / Subtrahieren einer Vielfachen einer Variablen auf beiden Seiten der Gleichung
4. Multiplizieren / Dividieren mit einer Zahl ungleich Null auf beiden Seiten der Gleichung
5. Vertauschen der beiden Seiten der Gleichung

1.1.2 nicht Äquivalente Umformungen

Die Umformungsschritte verändern die Lösungsmenge der Gleichung, dies ist manchmal jedoch nicht zu vermeiden (z.B. Wurzelgleichung). Hier einige Auswahl der wichtigsten Fälle:

Wurzelgleichungen

1. Gleichung so umformen das die **Wurzel isoliert** (allein auf einer Seite) steht.
2. Gleichung auf beiden Seiten **quadrieren**
=> die Wurzel fällt weg und es kann die Lösung ermittelt werden
3. Durch **Probe** alle Lösungen überprüfen (in die Ausgangsgleichung einsetzen)

Substitution

z.B.: $x^2 = z$; $\sin x = z$; $\ln x = z$

oder: $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ Man setzt $\cos x = z$. Für z gilt dann $-1 \leq z < 1$. In der Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ braucht aber z nicht auf dieses Intervall beschränkt zu sein!

Bruchgleichungen

1. Beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren.
2. Durch **Probe** alle Lösungen überprüfen (in die Ausgangsgleichung einsetzen)
Beachte: Werte für die der Nenner Null wird!

z.B.: $\frac{x}{x+3} + \frac{5}{x+7} = 1 \quad | \cdot (x+3)(x+7)$
 $x \cdot (x+7) + 5 \cdot (x+3) = (x+3) \cdot (x+7)$
 ...

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Anwenden der Logarithmengesetze (*siehe 1.5*) kann hier beim auflösen weiterhelfen.

z.B.: $5^x = 100 \quad | \lg$
 $\lg 5^x = \lg 100 \quad | \text{wegen } \lg a^x = x \lg a$
 $x \cdot \lg 5 = \lg 100 \quad | : \lg 5$
 $x = \frac{\lg 100}{\lg 5} = \frac{2}{\lg 5} \approx 2,86$

oder:

$$\lg(3x) = 2 + \lg(x-1)$$

$$\lg(3x) - \lg(x-1) = 2$$

$$\lg \frac{3x}{x-1} = 2 \quad | \text{ zur Basis 10 exponieren um den lg aufzuheben } (10^{\lg x} = x)$$

$$\frac{3x}{x-1} = 10^2 \quad | \cdot (x-1)$$

$$3x = 100 \cdot (x-1)$$

...

$$x = \frac{100}{97} \approx 1,03$$

1.2 Manche sehen sowas ;o)

$$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

$$x^5 \cdot \frac{1}{x} = x^4 \cdot 1$$

$$\frac{\ln}{1} \cdot \frac{1}{e} = \ln \cdot \frac{1}{e} = 1$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b \cdot c}, \text{ weil } \frac{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b}{c \cdot b}$$

$$e^{\ln x} = x = \ln e^x$$

$$(a^2 - b^2) = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$\text{z.B.: } (x^2 - 1) = (x^2 - 1^2) = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

1.3 Konstanten

$$e = 2,7182$$

$$\pi = 3,1415$$

1.4 Wurzel- und Potenzregeln

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$x^{y^z} = x^{(y^z)}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1.5 Logarithmen

$\log_b a$ ist eine eindeutig bestimmte Zahl, mit der man b potenzieren muß um a zu erhalten.

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

$$\log_2 a = \log_2 a$$

$$\lg a = \log_{10} a$$

$$\ln a = \log_e a$$

Regenregeln ($u, v > 0$):

$$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \left(\frac{u}{v} \right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^z = z \cdot \log_b u$$

$$\log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_b u$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Basis umrechnen:

$$\log_{10} z = \frac{\ln z}{\ln 10}$$

1.6 Matrizen

$$A \cdot B = C \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 4 + c \cdot 7 & a \cdot 2 + b \cdot 5 + c \cdot 8 & a \cdot 3 + b \cdot 6 + c \cdot 9 \\ d \cdot 1 + e \cdot 4 + f \cdot 7 & d \cdot 1 + e \cdot 4 + f \cdot 7 & d \cdot 1 + e \cdot 4 + f \cdot 7 \\ g \cdot 1 + h \cdot 4 + i \cdot 7 & g \cdot 1 + h \cdot 4 + i \cdot 7 & g \cdot 1 + h \cdot 4 + i \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Determinante: } \begin{vmatrix} +a & -b & +c \\ -d & +e & -f \\ +g & -h & +i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + d \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

$$M^{\text{transponiert}}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{Zeilen und Spalten tauschen!}$$

$$M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot v_1 + b \cdot v_2 \\ c \cdot v_1 + d \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

1.7 Quadratische Funktion (Parabel)

$$\text{Allgemeine Form: } y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Produktform: } y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad x_1; x_2 \text{ sind Nullstellen der Parabel}$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.8 Trigonometrische Beziehungen

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2 = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

1.9 Umkehrfunktion

Man erhält die Umkehrfunktion in den meisten Fällen durch folgendes Verfahren:

1. Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x
(die Auflösung muss möglich und eindeutig sein!)

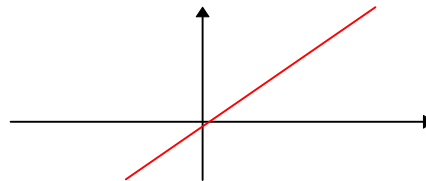
$$y = f(x) \xrightarrow{\text{nach } x \text{ auflösen}} x = g(y)$$

2. Variablen x und y formal miteinander vertauschen, dadurch erhält man die Umkehrfunktion $y = g(x)$

$$x = g(y) \xrightarrow{x \text{ und } y \text{ vertauschen}} y = g(x)$$

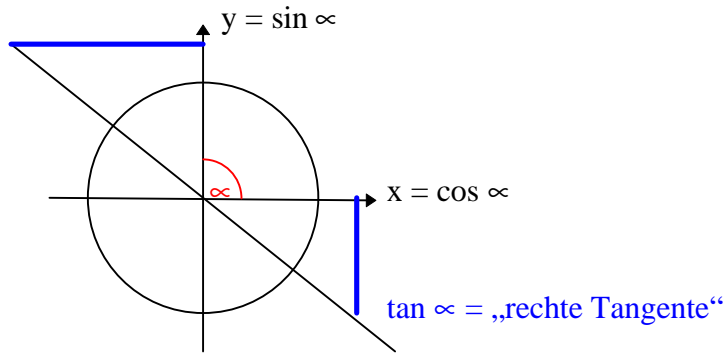
Allgemein gilt weiterhin:

- Jede streng monoton wachsende/fallende Funktion ist umkehrbar.
- Bei der Umkehrung der Funktion werden Definitions- und Wertebereich vertauscht
- Zeichnerisch: Spiegelung der Funktionswerte an der Geraden $y=x$



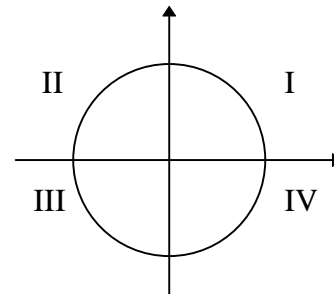
1.10 Einheitskreis

$\cot \alpha =$ „obere Tangente“

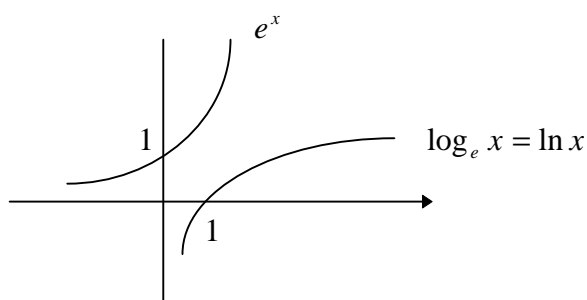
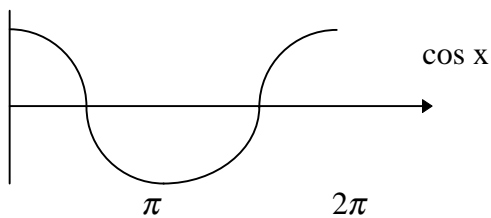
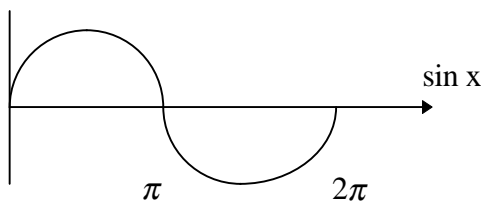


Vorzeichenregel:

Quadrant	I	II	III	IV
Sinus	+	+	-	-
Cosinus	+	-	-	+
Tangens	+	-	+	-
Kotangens	+	-	+	-



1.11 Wie sehen die Trigonometrischen Funktionen aus?



1.12 Was sind Arkusfunktionen (arc)?

Grundsätzlich lassen sich trigonometrische Funktionen wegen der fehlenden Monotonieeigenschaft nicht umkehren. Beschränkt man diese jedoch auf bestimmte Intervalle, gilt:

Arkusfunktionen sind die **Umkehrfunktionen** der auf **bestimmte Intervalle** beschränkten **trigonometrischen Funktionen** (sin, cos, tan, cot) unter der Voraussetzung das die trigonometrischen Funktionen in dem gewählten Intervall **streng monoton** (d.h. die Funktionwerte steigt permanent - $f(x_1) < f(x_2)$) und somit umkehrbar (=injektiv, d.h. es existiert eine Umkehrfunktion f^{-1}) sind.

1.13 Was ist der Kotangens (cot)?

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

2. Grenzwerte

2.1 Allgemein

Bei der Berechnung von Grenzwerte gilt:

- die e-Funktion dominiert

- immer berücksichtigen das etwas gegen Null im Nenner nie Null wird, sondern nur ganz klein

und folglich der gesamte Bruch dann z.B. bei $\frac{\rightarrow \infty}{\rightarrow 0}$ gegen ∞ oder $\frac{\rightarrow -\infty}{\rightarrow 0}$ gegen $-\infty$ geht.

2.2 unbestimmte Ausdrücke

$$0 \cdot \infty \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad \infty - \infty$$

Merke: unbestimmte Ausdrücke lassen sich nach $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ umformen.
Dann kann l'Hospital angewendet werden!

2.3 Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{x} = 0 \quad 1 - \frac{1}{x} = 1 \quad \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0) \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

2.4 Grenzwerte für $x \rightarrow -\infty$

$$e^x \Rightarrow 0$$

2.5 Grenzwerte für $x \rightarrow 0$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \quad \frac{\sin x}{x} = 1 \quad x \cdot \ln x = 0 \quad \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2.5 Grenzwerte für $x \rightarrow -0$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \infty$$

2.7 l'Hospital

Kann immer dann angewendet werden, wenn bei der Grenzwertbestimmung folgende Form auftritt:

$$\frac{0}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Leite die Faktoren im Zähler und im Nenner ab und betrachte dann die Ableitungen!

z.B.: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

l'Hospital: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} \cdot 2x \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x} = 0$

3. Differenzieren

3.1 Was bedeutet das?

Die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$, an der Stelle $x = x_0$, ist der Steigungswert der Tangente in x_0 bzw. der Differentialquotient von $y = f(x)$. Für $f'(x)$ kann man auch schreiben:

$$y' \text{ oder } \frac{dy}{dx} \text{ (Ableiten einer Funktion } y = f(x) \text{ nach der Variablen } x)$$

3.2 Spezielle Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\cos x$	$-\sin x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\cos x$	$\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^{-x}	$-e^{-x}$	$\text{arc cot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$-e^{-x}$	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$
		$\cosh x$	$\sinh x$
		$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
		$\text{coth } x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \text{coth}^2 x$

3.3 Allgemeine Regeln

$f(x)$	$f'(x)$	
$(u \cdot v)'$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	„Produktregel“
$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	„Quotientenregel“
$(u(x) + v(x))'$	$u'(x) + v'(x)$	„Summenregel“
$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$	„konstanter Faktor“
$(e^{a \cdot x})'$	$e^{a \cdot x} \cdot a$	
$\frac{1}{2} \cdot [f(x)^2]'$	$f(x) \cdot f'(x)$	
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	
$(e^{x^2})'$	$(e^z)' \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x$	

Kettenregel:

$$u[v(x)]' = u'(v) \cdot v'(x)$$

Beispiel:

$$\sin x^2 = \cos x^2 * 2x \quad (1. \text{ Schritt}, 2. \text{ Schritt}, 3. \text{ Schritt (Nachdifferenzieren!)})$$

$$\sin (x^2+1) = \cos (x^2+1) * 2x \quad (1. \text{ Schritt}, 2. \text{ Schritt}, 3. \text{ Schritt})$$

3.4 Leibnitz-Regel

Fragestellung: Berechnen Sie die n-te Ableitung nach der Leibnitz Regel.

Hinweis: Macht Sinn wenn ein Produkt aus zwei Funktionen differenziert werden soll.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\binom{n}{0} \cdot u \cdot v^{n-0 \text{te-Ableitung}} + \binom{n}{1} \cdot u' \cdot v^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \cdot u^n \cdot v$$

Alternativ als allgemeine Summe geschrieben:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)}(x) \cdot v^k(x)$$

4. Integrieren

4.1 Was bedeutet das?

4.2 Spezielle Integrale

$f'(x)$	$F(x)$		
$\int x^n dx$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$		
$\int \frac{f'}{f} dx$	$\ln f + C$		
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C$		
$\int \frac{1}{x+a} dx$	$\ln x+a + C$		
$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx$	$-\frac{1}{x+a} + C$		
$\int a^x$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C = \frac{a^x}{\ln a} + C$		
$\int \tan x dx$	$-\ln \cos x + C$		
$\int \sin^2 ax dx$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C$		
$\int \cos^2 ax dx$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C$		
$\int \ln^2 x dx$	$x \cdot \ln^2 x - 2 \ln x + 2x + C$		
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	$2\sqrt{x} + C$		
$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$		
$\int e^{ax} dx$	$\frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$		
$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int -e^{-x} dx$	$e^{-x} + C$
$\int \frac{1}{e^x} dx$	$-e^{-x} + C$		

$$\int x \cdot e^{ax} dx = \frac{ax-1}{a^2} e^{ax} + C$$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int x \cdot \ln x dx = x^2 \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4} \right) + C$$

$$\int \sin ax \cdot \cos ax dx = \frac{1}{2a} \cdot \sin^2 \cdot ax + C$$

$$\int \frac{1}{\sin ax \cdot \cos ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\tan ax| + C$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx) + C$$

$$\int x \cdot \sin ax dx = \frac{1}{a^2} \cdot \sin ax - \frac{x}{a} \cdot \cos ax + C$$

4.3 Allgemeine Regeln

$$f'(x) \quad F(x)$$

$$\int u' \cdot v dx = uv - \int uv' dx$$

partielle Integration

wobei: **u = einfach** und **v = kompliziert**

$$\int f(ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot (ax+b)^{n+1} \cdot \frac{1}{a}$$

Substitution I

wobei: $a = (ax+b)'$ ist!

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Substitution II

wobei: $x = g(t)$

$$dx = g'(t) dt$$

z.B.: I. $f(x) = \int x \cdot e^{x^2} dx$

1.) $z = x^2$ suche z

2.) $x = \sqrt{z}$ nach x auflösen

3.) $x' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

$$F(x) = \int \sqrt{z} \cdot e^z \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int e^z dz = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

II. $f(x) = \int_0^1 \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx$

1.) $z = \cos x$

2.) $\frac{dz}{dx} = -\sin x$

3.) $dx = \frac{1}{-\sin x} dz$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\sin x}{z^3} \cdot \frac{1}{-\sin x} dz = \int_0^1 -\frac{1}{z^3} dz = -\int_0^1 \frac{1}{z^3} dz = \int_0^1 z^{-3} dz = \dots$$

$$\int a \cdot f(x) + b \cdot g(x) \quad a \cdot \int f(x) + b \cdot \int g(x) \quad \text{Umformungsregel !}$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) \quad \frac{1}{2} [f(x)]^2$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right)$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right)$$

4.4 Das bestimmte Integral

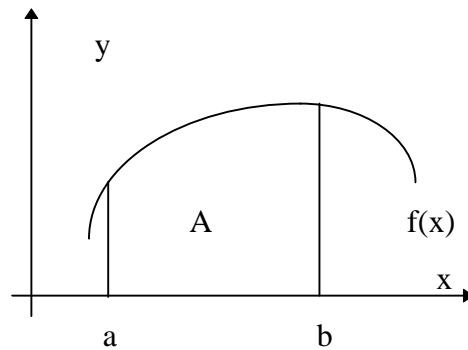
4.4.1 Was ist das?

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist der Flächeninhalt A des von der Kurve $f(x)$, der x-Achse

und den beiden Geraden $x = a, x = b$ begrenzten Gebietes in der x,y-Ebene.

Ist $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, so gilt:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



4.4.2 Formeln

$$\int_a^b f(x) dx \qquad F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx \qquad \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx \qquad c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^c f(x) dx \qquad \int_a^b f(x) + \int_b^c f(x)$$

5. Taylorreihen

5.1 Grobe Vorgehensweise

$$\begin{array}{lll}
 f_{x_0} = 1 & f(x) = e^{2x} & f(1) = e^2 \\
 & f'(x) = 2 \cdot e^{2x} & f'(1) = 2e^2 \\
 & f''(x) = 4 \cdot e^{2x} & f''(1) = 4e^2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) \\
 &\quad + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) \\
 &\quad + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cdot f'''(x_0) \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + \mathbf{Rest}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Rest} = \frac{f^{(n+1)}(Stelle)}{(n+1)!} \cdot (Stelle - x_0)^{n+1}$$

wobei n das Glied ist, bis zu dem entwickelt wird!

6. Extrema

6.1 Extrema in R

Hochpunkt (Maximum) $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) < 0$

Tiefpunkt (Minimum) $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) > 0$

Wendepunkt $f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0$

Um den y-Wert des Extremums zu bestimmen, den x-Wert der jeweiligen Ableitung bei x_0 in die Ausgangsgleichung $f(x)$ einsetzen!

Nullstellen $f(x) = 0$ setzen!

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad h(x) = 0 \quad \vee \quad g(x) = 0$$

6.2 Extrema in R²

$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x_0, y_0) = 0$ Jakobi-Matrix f'

$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ $\det |HesseMatrix| > 0$ Hesse-Matrix f''



$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ Maximum $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ Minimum

6.3 Extrema in \mathbb{R}^3

$$\text{Jacobi-Matrix} \quad \left(f_x(x, y, z) \quad f_y(x, y, z) \quad f_z(x, y, z) \right)$$

$$\text{Hesse-Matrix} \quad \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{yz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

- Rezept:**
- Jacobi-Matrix berechnen
 - Hesse-Matrix berechnen
 - Hesse Matrix, an einem bestimmten kritischen Punkt => für jeden kritischen Punkt einzeln berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{irgendein Vektor } x, y, z$$

$$\text{HM:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z \\ 7 \cdot x + 8 \cdot y + 9 \cdot z \end{pmatrix} = \text{mit obigen Vektor multiplizieren}$$

Vektor umklappen und mit gerade berechnetem Ausdruck multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z \\ 7 \cdot x + 8 \cdot y + 9 \cdot z \end{pmatrix} = x \cdot (1x + 2y + 3z) + y \cdot (4x + 5y + 6z) + z \cdot (7x + 8y + 9z)$$

- Jetzt vergleichen, ob der gerade berechnete Ausdruck
- > 0 Minimum
 - = 0 keine Aussage möglich
 - < 0 Maximum

7. Optimierung unter Nebenbedingungen

- Rezept:**
- Bringe **NB** = $g(x_1, x_2)$ auf die Form $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
 - Berechne Gradienten $\nabla f(x_1, x_2)$ und $\nabla g(x_1, x_2)$
 - Extrema höchstens bei $\nabla f(x_1, x_2) + \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) = \vec{0}$
 - Gleichungssystem für
 - I. *Gleichung*(x_1, λ) = 0
 - II. *Gleichung*(x_2, λ) = 0
 - III. *NB*: $x_1^2 + x_2^2 = 1$
- lösen!

8. Differenzialgleichungen (DGL)

8.1 Welche Arten gibt es?

8.2 lineare DGL 1. Ordnung (S. 261 - 264 Papula)

Form: $y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$ $b(t) =$ Inhomogenität

Formel:

$$y(t) = y(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(u) \cdot e^{\int_{t_0}^u a(s) ds} du$$

Beispiel: $y'(t) = 2t \cdot y(t) + 5t^3$ und $y(0) = 1 \Rightarrow t_0 = 0$

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$$

Nach obiger Formel von innen nach außen lösen! (rechts nach links)

$$1. \quad \int_u^t a(s) ds = \int_u^t 2s ds = \left[2 \cdot \frac{1}{2} s^2 \right]_u^t = [s^2]_u^t = t^2 - u^2$$

$$2. \quad \int_{t_0}^t b(u) \cdot e^{\int_{t_0}^u a(s) ds} = \int_{t_0}^t b(u) \cdot e^{(t^2 - u^2)} du = \int_0^t b(u) \cdot e^{(t^2 - u^2)} du = \int_0^t 5u^3 \cdot e^{(t^2 - u^2)} du$$

$$5 \cdot \int_0^t u^3 \cdot e^{(t^2 - u^2)} du = 5 \cdot \int_0^t u^3 \cdot e^{t^2} + e^{-u^2} du = 5e^{t^2} \cdot \int_0^t u^3 \cdot e^{-u^2} du$$

Integral lösen!

8.3 autonome DGL 1. Ordnung (mit Trennung der Variablen)

Hier müssen erst alle y auf eine Seite und alle t auf die andere Seite gebracht werden!

Beispiel: $y' = \sin t \cdot e^y$ mit $y(0) = 0 \Rightarrow t_0 = 0$

$$1. \quad \frac{dy}{dt} = \sin t \cdot e^y \quad | \cdot dt \quad | : e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = \sin t \, dt \quad | \int$$

$$\int \frac{1}{e^y} dy = \int \sin t \, dt$$

$$-e^{-y} = -\cos t + c \quad | \cdot (-1)$$

$$e^{-y} = \cos t - c \quad | \ln$$

$$-y = \ln(\cos t - c) \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{y = -\ln(\cos t - c)}$$

2. Anfangsbedingung: $y(0) = 0$

$$y(0) = -\ln(\cos 0 - C) \quad \cos 0 = 1$$

$$y(0) = -\ln(1 - C)$$

$$\underline{c = 0}$$

$$\text{weil: } 1 - 0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \quad \hat{=} y(c)$$

Literaturverzeichnis

Vorlesungsunterlagen Prof. Dr. Köhler / Prof. Dr. Baums (Fachhochschule Hof)

Mathematische Formelsammlung; Lothar Papula; Vieweg; ISBN 3-528-44442-8; ca. 50,-- DM

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Band1; Vieweg; ISBN 3-528-64236-X

Repetitorium der höheren Mathematik; Merziger, Wirth; Binomi; ISBN 3-923923-33-3